E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M. - I.C.P.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1986

Série T

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Vendredi 30 Mai 1986 de 8h à 12h

A rédiger sur copies de couleur BLEUE

PROBLEME

1. On donne c réel et on définit deux suites réelles par les formules :
$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + c\,v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_0 > 0$ et $v_{n+1} = u_n \cdot v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Calculer u_n et v_n pour tout entier n, en discutant suivant c.

1.2. Pour $c > 0$, calculer $r_n = \frac{u_n}{v_n}$ en fonction de $t = \frac{1-k}{1+k}$ où $k = \sqrt{c}$.
Etudier la suite (r_n). Quand y-a-t-il oscillation ?

1.3. Dans le cas particulier : $c = 5$, $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, calculer r_3 et r_4 exactement. A quoi cela peut-il servir ?

2. On considère l'équation différentielle :

$$2(1-x^2)\,y'' - (1+3x)\,y' + y = 0 \qquad (E).$$

2.1. Déterminer la solution particulière $s(x)$ de (E), développable en série entière et vérifiant : $s(0) = 1$ et $2s'(0) = 1$.

2.2. En comparant $s(x)$ et $(1+x)s'(x)$, retrouver une expression plus simple de $s(x)$.

2.3. Comment peut-on utiliser $s(x)$ pour calculer $\sqrt{5}$ avec trois décimales exactes ?

2.4. (Facultatif) Terminer l'intégration de (E).

3. Polynômes.

3.1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme : $X^{2n+1} - 1$.

3.2. Pour $n = 2$, $X^5 - 1 = (X-1)\,p(X)$. L'équation : $p(X) = 0$ se simplifie à l'aide de la transformation : $Y = X + \frac{1}{X}$; résoudre alors l'équation en Y obtenue. En déduire une factorisation réelle de $p(X)$.

3.3. Pour $\theta = \frac{\pi}{5}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos 2\theta$ et $\cos 4\theta$.
Trouver des encadrements numériques à l'aide des résultats de 1.3. et 2.3.

4. Constructions géométriques (à faire à la règle et au compas). R = 4 cm.

4.1. Dans un repère orthonormé direct xOy, tracer un cercle Γ de centre O et de rayon R. Γ coupe Ox en A et Oy en B. Construire le milieu J de OB et le cercle Γ' de centre J et de rayon JA.
Γ' recoupe Oy en I (extérieur à Γ) et en K (intérieur à Γ).
Calculer (en cm) la longueur IK.

4.2. Le cercle Γ_1 de centre A et de rayon AI recoupe Γ en A' (le plus proche de I) et en A"". Le cercle Γ_2 de centre A et de rayon AK recoupe Γ en A" (le plus proche de K) et en A"'. Joindre successivement les points A, A', A", A"', A"" et A.

4.3. Déterminer : les angles $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right)$ (en radians) ;
les longueurs ℓ' et ℓ'' des segments AA' et AA" (en cm) ;
les distances d' et d" de O aux droites AA' et AA" (en cm).

5. Géométrie descriptive. Format A3 vertical (29,7 x 42 cm).
Ligne de terre parallèle au petit côté et à 24 cm du bord inférieur.
Origine O à 6 ou 7 cm du bord gauche. Ox vers le bas, Oy vers la droite, Oz vers le haut.

5.1. Un plan passe par O et ses horizontales font avec Ox un angle $\theta = \frac{\pi}{5}$.
Construire sa trace horizontale OP.
Ce plan passe en outre par M de coordonnées :
$x = \ell''$, $y = 2\,d''$, $z = 5d'$.
Construire la trace frontale OQ' du plan.

5.2. Construire l'intersection Δ du plan POQ' et du premier bissecteur $(x = z)$.

5.3. Soit Ω le point de Δ situé à 5 cm de M, et d'éloignement supérieur à M.
Construire l'étoile à cinq branches de centre Ω, dont M est un sommet.

5.4. "Ombre au soleil" : une source lumineuse dont les rayons sont tous parallèles à la direction $(x + y = 0,\ y + z = 0)$ éclaire la figure précédente. Déterminer son ombre portée sur les plans de projection supposés opaques.
